数理解析研究所講究録
560巻 1985年 142-151


# Egoroff's type convergence in the Dedekind completion of a C*algebra

東北大 理 斎藤和之 (Kazuyuki Saitô)

C*-環のエルミート部分は, order unit ベクトル空間であるから, suprema, infima を保存して, Dedekind completion と呼ばれる bounded complete ベクトル束 (可換 AW*-環のエルミート部分) に埋蔵することができる。 この講演では, "順序収束" を問題にするかぎりでは, Dedekind completion は, ほとんどすべての可分 C*-環について, "良いふるまい" をしないことを述べたいと思う。

<u>定理</u>. $\mathfrak{A}$ を可分な C*-環とし, $\mathfrak{A}$ が unital でない時, $\mathfrak{A}_1$ を $\mathfrak{A}$ に 1 を添加した C*-環とする ($\mathfrak{A}$ が unital なら $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$ とする)。 $\mathfrak{A}_1$ のエルミート部分の, order unit ベクトル空間としての Dedekind completion を $V$ とする。 $V$ の任意の順序収束 (定義1) する有界ネット $\{a_\alpha\}$ が同じ極限に Egoroff の意味 (定義2) で収束するための必要十分条件は, $\mathfrak{A}$ が可換で, $\mathfrak{A}$ のスペクトルが稠密な孤立点の集合を含むことである。

<u>注意.</u> 必要性はネットの代りに $V$ の元の列に関する主張で十分である。すなわち、$V$ の元から成る任意の順序収束する有界列 $\{a_n\}$ が同じ極限に Egoroff の意味で収束すれば、$\mathcal{A}$ は可換で、Spec $\mathcal{A}$ は稠密な孤立点の集合を含む。

議論に入る前に記号の説明と定義を述べよう。$Z$ を可換な AW*-環とし、$\Omega$ を $Z$ のスペクトルとする。$Z_h$ を $Z$ のエルミート部分、すなわち、$Z_h := \{x \in Z \mid x = x^*\}$ とすれば、$Z_h$ は $\Omega$ 上の実数値連続関数全体のつくる $C^*$-環 $C_r(\Omega)$ と *-同型である。$C_r(\Omega)$ における自然な順序に関して bounded complete な束となる。すなわち、$C_r(\Omega)$ の任意の有界部分集合 $\mathcal{F}$ に対して、最小上界 LUB $\mathcal{F}$、最大下界 GLB $\mathcal{F}$ が $C_r(\Omega)$ の中にある。

$Z_h$ $(= C_r(\Omega))$ の中に次のような<u>順序収束</u>の概念が導入される。

<u>定義 1</u> $C_r(\Omega)$ における有界なネット $\{a_\lambda\}$ が $a \in C_r(\Omega)$ に順序収束 (O-収束) する (記号で $a_\lambda \to a(O)$ と書かれる) とは

$$a = \limsup a_\lambda = \liminf a_\lambda$$

となる時である。但し $\limsup a_\lambda = \mathrm{GLB}_\mu \mathrm{LUB}_{\lambda \geq \mu} a_\lambda$ で、$\liminf a_\lambda = -\limsup(-a_\lambda)$ である。

H. Widom [6] による次のような $Z_h$ における"O-収束"に

関する判定条件がある。

<u>補題 1</u>. $\mathcal{Z}_h$ における有界なネット $\{a_\lambda\}$ が $a \in \mathcal{Z}_h$ に順序収束するための必要十分条件は，任意に与えられた $\mathcal{Z}$ の 0 でない projection $e$ と正の数 $\varepsilon$ に対して，$e$ の部分 projection $f(\neq 0)$，index $\lambda_0$ とがあって，$\lambda \geq \lambda_0$ なら $\|f(a_\lambda - a)\| < \varepsilon$ となることである。

<u>定義 2</u>. $\mathcal{Z}_h$ の有界なネット $\{a_\lambda\}$ が $a \in \mathcal{Z}_h$ に Egoroff の意味で（E-収束）収束する（$a_\lambda \to a\,(E)$）とは，$\mathcal{Z}$ の projection の直交族 $\{e_\alpha\}$ で $\sum_\alpha e_\alpha = 1$，且つ，$\|(a_\lambda - a)e_\alpha\| \to 0\ (\lambda)$ が各 $\alpha$ に対して成立するようなものが存在する時である。

<u>注意</u>. "E-収束" $\Rightarrow$ "O-収束"。

<u>問題</u> "$\Leftarrow$" は成立するか？

一般に成り立たない。$\mathbb{R}$ を実軸とし，$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の有界複素数値 Borel 関数全体のつくる $C^*$-環とする。$\mathcal{M}$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元で台が $\mathbb{R}$ の第 1 類集合であるようなもの全体（$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の閉イデアルとなる）とする。この時，商 $C^*$-環

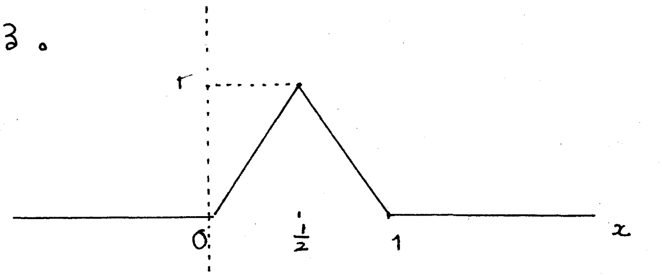
$B(\mathbb{R})/m = Z$ は可換 AW*環でありそのスペクトル $\Omega$ は稠密な第1類集合をもつ。しかも $Z$ は von Neumann 環ではない [1]。今 $B(\mathbb{R})$ から $Z$ の上への自然な写像を $g$ としよう。

Egoroff の定理の<u>カテゴリー的アナローグ</u>が一般に成り立たないことが知られている([2])。

$\phi(\cdot)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数で、

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &:= 2x & x &\in [0, \tfrac{1}{2}]\ ; \\
&:= 2-2x & x &\in [\tfrac{1}{2}, 1]\ ; \\
&:= 0 & x &\in \mathbb{R} \setminus [0, 1]
\end{aligned}
$$

とする。

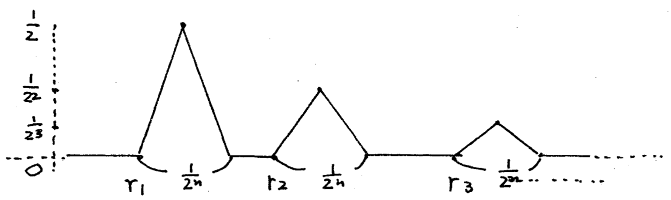



$\{r_i\}$ を $\mathbb{R}$ の稠密な可算集合(例えば有理数全体)とし、

$f_n$ を

$$f_n(x) := \sum_{i=1}^{\infty} (1/2^i)\,\phi\left(2^n(x-r_i)\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

とする。$f_n(x)$ は、下の図の様な関数を重ね合わせたものである。




各 $n$ に対して、$a_n := g(f_n)$ $(n=1,2,\dots)$ $(\in Z_h)$ とすれば、

$\{a_n\} \subset Z_h$ で $\{a_n\}$ は有界（$\|a_n\| \leqq 1$ となる）であり で、

1) $a_n \to 0\,(O)\ (n \to \infty)$

2) $a_n \not\to 0\,(E)\ (n \to \infty)$

となる。詳細は原論文［4］にある。

しかし次の補題により問題の部分的肯定解を得る。

補題 2. $Z = L^\infty(\Gamma, \mu)$ 又はさらに一般に $Z$ のスペクトル $\Omega$ が"すべての第1類集合が全疎となる"を満せば，"O-収束"⇨"E-収束"となる（この時 $Z$ は property E をもつということにする）。

証明は測度論における Egoroff の定理に他ならない。後半は Dini の定理を使えばよい。

注意. 一般に可換な AW* 環のスペクトル $\Omega$ は（$\Omega$ はストーン空間となる）

$$\Omega = \Omega_1 \oplus \Omega_2$$

$\Omega_1$ はすべての第1類集合が全疎となるストーン空間，$\Omega_2$ は稠密な第1類集合が存在するストーン空間となるように一意に分解できる。$\Omega_2$ の稠密な第1類集合を使って，$C(\Omega_2)$ のネットで"O-収束"で，"E-収束"しないものを構成できるので 補題2の逆も成立する。ここでは興味の対象ではないので詳細は略す。

定理の証明のためにいくつかの補題を用意する。

$\mathfrak{A}$を可分$C^*$環とし，$\mathfrak{A}$がunitalでない場合は$\mathfrak{A}$に1を添加した$C^*$環$\mathfrak{A}_1$を考える事にする。$\mathfrak{A}$がunitalの時，便宜的に$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}$とする。$V$を$(\mathfrak{A}_1)_h$のorder unitベクトル空間としてのDedekind completionとすれば，$V$は可換なAW*環のエルミート部分である。$V$の構成については種々あるが，次の$C^*$環的構成法がJohn Wrightにより与えられた[8]。

$X$を$\mathfrak{A}_1$のステート空間とし，$\sigma(\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{A}_1)$により$X$上に位相を導入する。$\mathcal{B}(X)$を$X$上の有界複素数値Borel関数全体のつくる$C^*$-環とする。

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}_1} := \{ f \in \mathcal{B}(X) \mid \{ x \in \partial X \mid f(x) \neq 0 \} \text{ が } \partial X \text{ の第1類集合} \}$$

但し，$\partial X$は$X$の端点境界とし，位相は$X$の位相を$\partial X$に制限したものとする。

この時，$\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}_1}$は$\mathcal{B}(X)$の閉イデアルとなり，商$C^*$-環$\mathfrak{A} := \mathcal{B}(X)/\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}_1}$が条件を満すことが，Dedekind completionの一意性により，証明される。

<u>補題3</u>. $\mathfrak{A}$はKaplansky-Rickart環（KR-環）である，すなわち，$\mathfrak{A}_h$の可算個の元$\{a_n\}$があり，$\mathfrak{A}_h$の任意の元$x$は，

$$x = \mathrm{LUB}_{\mathfrak{A}_h}\{ a_n \mid a_n \leq x \}$$

と書ける（この時，"$\{a_n\}$ は $\mathfrak{A}_n$ で順序に関して稠密である" という）。

<u>補題 4</u>．もし $\mathcal{E}$ がアトムをもたない可換な $K R$-環ならば，$\mathcal{E}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathfrak{m}$ と $*$-同型である。

この事は位相空間の一般論（例えば Kuratowski の Topology の教科書）を使うことにより証明される。詳細は Sikorski の [2] を参照されたい。

<u>補題 5</u>．$\hat{A}$ を $A$ の正則完備化（[7]，[3]）とする。この時，$\hat{A}_n$ は $V$ の $\sigma$-閉部分空間である，すなわち，次のような $\hat{A}_n$ から $V$ の中への unital な $\sigma$-正規な，単射的埋蔵がある。

$$(A_1)_n \hookrightarrow \hat{A}_n \hookrightarrow V \ (= \mathfrak{A}_n).$$

$W$ を $\hat{A}_n$ の Dedekind completion としよう。$(A_1)_n$ は $\hat{A}_n$ で順序に関して稠密だから，Dedekind completion の一意性により $W$ が $(A_1)_n$ の Dedekind completion となり $W = V$ となる。次にこの単射的埋蔵が <u>$\sigma$-正規</u>，すなわち，"$\hat{A}_n$ の任意の単調増加列 $\{a_n\}$ で，$\hat{A}_n$ のある元 $a$ に対して，$a_n \uparrow a$ ($\hat{A}_n$) を満すものに対して，"$a_n \uparrow a$" が $V$ においても成り立つ" ことを示そう。

$X_{\hat{A}}$ を $\hat{A}$ のステート空間とすれば、$V = \mathcal{B}(X_{\hat{A}})/m_{\hat{A}}$ と表わされる。$\{a_n\}$ を $\hat{A}_n$ の元の単調増加列で $\hat{A}_n$ の元 $a$ に対して $a_n \uparrow a\ (\hat{A}_n)$ としよう。$\mathcal{B}_{\hat{A}}$ を $\hat{A}$ の Borel 閉包とすれば、$\mathcal{B}_{\hat{A}}$ において"ほとんど至る所" $a_n \uparrow a$ である。すなわち、$\partial X_{\hat{A}}$ の第1類集合 $M$ があって、$\{a_n\}$ は $M^c \cap \partial X_{\hat{A}}$ の至る所で $a$ に収束する。一方 $\mathcal{B}_{\hat{A}}$ は自然に $\mathcal{B}(X_{\hat{A}})$ に埋蔵されるから $g_{\hat{A}}(a_n) \uparrow g_{\hat{A}}(a)$ が $V$ で成り立つ。

<u>注意</u> 上の補題で $\hat{A}$ の可分性は必要ない。ここでは興味の対象ではないので省略する。

<u>定理の証明の概略.</u>

<u>仮定</u> $\mathfrak{A}_n = V$ が property E をもつとする。

この時，補題4，及び前掲の反例により $\mathfrak{A}$ は原子的可換 von Neumann 環となる。又 $\hat{A}_n$ は $\mathfrak{A}_n$ の $\sigma$-閉部分空間であるから $\hat{A}$ は忠実な正規ステートをもつことになり従って、$\hat{A}$ 自身 von Neumann 環である。一方 $\hat{A}$ は KR-環だから $\partial X_{\hat{A}}$ は、$\sigma(\hat{A}^*, \hat{A})|\partial X_{\hat{A}}$-可分である。よって一般論から、$\hat{A}$ は特に原子的 von Neumann 環である。すなわち、ヒルベルト空間の列 $\{\mathcal{H}_n\}$ があって

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$$

と書くことができる。正則完備化の一般論から $\mathcal{A}$ は、essential な、"$C^*$ 環としては <u>dual な</u>" 閉イデアル $I$ をもつ。Dedekind completion の一意性から $V$ は $(I_1)_h$ の Dedekind completion である。$I$ は dual だから、ヒルベルト空間の列 $\{\mathcal{K}_n\}$ があって、

$$I = \Sigma' \mathcal{C}(\mathcal{K}_n)$$

但し、$\Sigma'$ は $\mathcal{K}_n$ 上の完全連続作用素のつくる $C^*$ 環 $\mathcal{C}(\mathcal{K}_n)$ の制限付き $C^*$ 直和とする。

定理の証明は次の2つの主張を示すことにより終る。詳細は原論文［4］にゆずる。

<u>主張1</u>. $\partial X_I$ は稠密な、孤立点の集合を含む。

<u>主張2</u>. すべての $n$ に対して、$\dim \mathcal{K}_n \leqq 1$.

文献表


[1] J. Dixmier, *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone*, Summa Brasil., 11 (1951), 151-182.

[2] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer, New York/Heidelberg/Berlin, 1970.

[3] K. Saitô, A structure theory in the regular σ-completion of $C^*$-algebras, J. London Math. Soc., 22 (1980), 549-558.

[4] ————, Egoroff's type convergence in the Dedekind completion of a $C^*$-algebra, To appear in Studia Math. vol 83.

[5] R. Sikorski, Boolean algebras, Springer, New York / Heidelberg / Berlin, 1964 2nd edition.

[6] H. Widom, Embedding in $AW^*$-algebras, Ph. D. Thesis, University of Chicago, 1955.

[7] J. D. M. Wright, Regular σ-completions of $C^*$-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.

[8] ————, Embedding in vector lattices, J. London Math. Soc., 8 (1974), 699-706.

[9] ————, Wild $AW^*$-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976), 83-89.